2020 计算机学院概率论与数理统计

期中考试

1 填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. 某种产品的商标为“FIAIB”，其中有两个字母脱落了，有人捡起随意放回，求放回后仍为“FIAIB”的概率$\underline{\frac{11}{20}}$。

2. 以往资料表明，某个 3 口之家患新冠的概率如下：P(孩子得病) $= 0.6$，P(母亲得病|孩子得病) $= 0.5$, P(父亲得病|母亲及孩子得病) $= 0.4$，则母亲及孩子得病而父亲健康的概率是$\underline{0.18}$。

3. 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为$\underline{3p^2(1-p)^2}$。

4. 把长度为 a 的棒任意折成三段，则它们可以构成一个三角形的概率为$\underline{\frac{1}{4}}$。

5. 从数 1，2，3，4 中任取一个数记为 X，再从 $1, \cdots, X$ 中任取一个数记为 Y，则 $P(Y=2) =\underline{\frac{13}{48}}$。

6. 随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布，则 $P(\max\{X, Y\} \leq 1) =\underline{\frac{1}{9}}$。

7. 已知随机变量 $X \sim N(1, 4)$, Y 服从标准正态分布, 且 X, Y 相互独立, 令 $Z = 2X - 3Y$, 则随机变量 Z 的分布和参数是$\underline{N(2, 25)}$。

8. 下面 4 个函数中，可以作为随机变量 X 的分布函数是<u>(1)(3)(4)</u>。

$$（1）F_1(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \frac{1}{3},\ 0\le x<1\\ \frac{1}{2},\ 1\le x<2\\ 1,\ x\ge 2\end{cases}\quad（2）F_2(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \frac{ln(1+x)}{1+x},\ x\ge 0\end{cases}$$

$$（3）F_3(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \frac{1}{4}x^2,\ 0\le x<2\\ 1,\ x\ge 2\end{cases}\quad（4）F_4(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ 1-e^{-x},\ x\ge 0\end{cases}$$

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 和 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则 $a=$<u>0.4</u>,$b=$<u>0.1</u>

10. 已知 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-xe^{-y} & 0\le x\le y\\ 1-e^{-y}-ye^{-y} & 0\le y\le x\\ 0 & else\end{cases}$，

求：X 和 Y（是/否）相互独立<u>否</u>

2 简答题

1. （10 分）从过去的资料中知，在出口罐头导致索赔事件中，有 60% 是质量问题，30% 是数量短缺问题，10% 是包装问题。在这三个问题中，其中有部分经过协商解决了，经过协商解决的分别占 40%，60%，75%。

(1) 如果出了一件索赔事件，在争议中经过协商解决的概率；

(2) 如果出了一件索赔事件，在争议中经过协商解决了，问这一案件不属于包装问题的概率？

(1)

$$P = 0.6 \times 0.4 + 0.3 \times 0.6 + 0.1 \times 0.75 = 0.495$$

(2)

$$P = 1 - \frac{0.1 \times 0.75}{0.495} = \frac{28}{33}$$

2. （5 分）设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（单位：分钟）服从参数为 $\frac{1}{5}$ 的指数分布，某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟，他就离开。他一月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开的次数，计算 $P(Y \geq 1)$.

$$P(X \leq 10) = 1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 10} = 1 - e^{-2}$$
$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - e^{-2})^5$$

3. (15 分) 设 X 的概率密度函数为：

$$f_x(x) = ae^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$$

(1) 求 a
(2) 求 X 落在区间 (-∞,1) 内的概率
(3) 求 X 的分布函数 $F_X(x)$

(1)
由 $\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$ 可得 $a = \frac{1}{2}$
(2)

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}\, dx = 1 - \frac{1}{2e}$$

(3)

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & -\infty < x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

4. （15 分）设随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(1) 求 $Z=2X+1$ 的分布？

(2) (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$？

(3) Y 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)$？

(1)

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)\\&=P(2X+1\le z)\\&=P(X\le\frac{z-1}{2})\\&=F_X(\frac{z-1}{2})\\&=\begin{cases}0, & z\le 1\\ (\dfrac{z-1}{2})^3, & 1<z<3\\ 1, & z\ge 3\end{cases}\end{aligned}$$

(2)

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(3)

$0<y<1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_y^1\frac{9y^2}{x}\,dx=-9y^2\ln y$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

5. （15 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le k\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(1) 求 k 的值？

(2) 求条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$。

(3) 求 $P(X+Y\le 1)$。

(1)

由 $\int_0^k\int_0^y 6x\,dx\,dy=1$ 可得 $k^3=1$，即得 $k=1$

(2)

首先解得 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 时

$$f_X(x)=\int_x^1 6x\,dy=6x(1-x)$$
$$f_Y(y)=\int_0^y 6x\,dx=3y^2$$

即可得

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(3)

$$P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x}6x\,dydx=\int_0^{\frac{1}{2}}6x-12x^2\,dx=\frac{1}{4}$$